І ТУР ОЛІМПІАДИ З МАТЕМАТИКИ КПІ ІМ. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО

ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОГО СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ
ФАКУЛЬТЕТ ІНФОРМАТИКИ ТА ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ ТЕХНІКИ
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ТА ІНШІ ФАКУЛЬТЕТИ
2019 р.

Перший курс

1. Спростити матричний вираз

$$(2E - A)^{-1} + (E + A)^{-1} - 3(2E + A - A^2)^{-1}$$

у припущенні, що вказані обернені матриці існують.

2. Які значення може набувати відстань від точки $A(3, 2, 3)$ до різних площин, які проходять через точки $B(1, 1, 1)$ та $C(2, 2, 2)$?

3. Про числа $x, y \in \mathbb{R}$ відомо, що $x + \mathrm{e}^x = y + \mathrm{e}^y$. Чи обов'язково вірно, що $x^2 + \mathrm{e}^{-2x} = y^2 + \mathrm{e}^{-2y}$?

4. Знайти найбільше значення виразу

$$\lim_{x\to 0}\Big(\frac{a_1^x + \ldots + a_{2019}^x}{2019}\Big)^{\frac{1}{x}},$$

якщо $a_1, \ldots, a_{2019} > 0$ та $a_1^2 + \ldots + a_{2019}^2 = 1$.

5. Позначимо через D множину точок площини, що знаходяться всередині квадрата з вершинами $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$, $(1, -1)$. Зобразити геометричне місце таких точок Y на площині, що $\left\langle \overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY} \right\rangle \leq 1$ для будь-якої точки $X \in D$. Тут кутовими дужками позначено скалярний добуток векторів.

6. З набору цілих чисел $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_{2018}, a_{2019})$ сформуємо новий набір за правилом

$$\mathbf{a}' = \Big(\frac{a_1 + a_2}{2}, \frac{a_2 + a_3}{2}, \ldots, \frac{a_{2018} + a_{2019}}{2}, \frac{a_{2019} + a_1}{2}\Big).$$

Визначити всі набори $\mathbf{a}$, для яких всі елементи всіх наборів $\mathbf{a}', \mathbf{a}'', \mathbf{a}''', \ldots$ є цілими числами.

Розбір завдань І туру олімпіади відбудеться на засіданні математичного гуртка.
Деталі на https://www.facebook.com/groups/math.olymp.kpi/

Результати олімпіади будуть опубліковані на сайті http://matan.kpi.ua/

I ТУР ОЛІМПІАДИ З МАТЕМАТИКИ КПІ ІМ. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО

ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОГО СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ
ФАКУЛЬТЕТ ІНФОРМАТИКИ ТА ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ ТЕХНІКИ
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ТА ІНШІ ФАКУЛЬТЕТИ
2019 р.

Старші курси

1. Знайти всі многочлени P такі, що $P(0) = 0$ та $P(n^2+1) = P^2(n)+1$ для будь-якого цілого n.

2. Для функції $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$ визначити $f^{(2019)}(1)$ та $f^{(2020)}(1)$.

3. Знайти всі функції $\big(f(x), x \in (0, \infty)\big)$ такі, що

$$\int_0^1 f(tx)\,\mathrm{d}t = 2f(x)$$

   для кожного $x > 0$.

4. Послідовність комплексних чисел $(z_n, n \in \mathbb{N})$ задано формулою $z_n = (1+i)(1+\frac{i}{2})\cdot\ldots\cdot(1+\frac{i}{n})$. Чи існує границя $\lim_{n\to\infty} z_n$? Якщо так, то знайти її.

5. Числову послідовність $(x_n, n \in \mathbb{N})$ визначено у рекурентний спосіб:

$$\begin{cases} x_1 = 1; \\ x_{n+1} = \frac{\sqrt{x_n^2+4x_n}+x_n}{2}. \end{cases}$$

   Довести збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n^2}$$

   та знайти його суму.

6. Знайти найменше значення виразу

$$\sum_{1\le i<j\le 2019} a_i a_j,$$

   де $a_1, \ldots, a_{2019} \in [-1, 1]$.

Розбір завдань I туру олімпіади відбудеться на засіданні математичного гуртка.
Деталі на https://www.facebook.com/groups/math.olymp.kpi/

Результати олімпіади будуть опубліковані на сайті http://matan.kpi.ua/